Lógica y Computabilidad - Recuperatorio 2do Parcial - Primer cuatrimestre de 2020 (31/07/2020)

Nombre y Apellido	1	2	3	Nota

El parcial tiene una duración de cuatro horas. Se puede suponer demostrado todo lo que se dio en clases prácticas y teóricas.
En el caso de usar resultados de las guías de ejercicios, deben enunciar explícitamente el resultado. Todas sus respuestas deben estar justificadas

Ejercicio 1. Probar que para cada número natural $k \geq 1$ existe un conjunto satisfactible Γ de fŕmulas de la lógica proposicional tal que existen exactamente k valuaciones que satisfacen a Γ.

Solución 1.
La idea es primero ver que sucede con algunos valores de k y luego generalizar el procedimiento. Notar que para definir una valuación basta definir su valor en las variables proposicionales. Usando este hecho, si $k = 1$, basta tomar como conjunto Γ el conjunto de las variables proposicionales. Es decir, $\Gamma = \mathbf{Var}$.

En este caso existe una única valuación que satisface a Γ que es aquella que toma el valor 1 en todas las variables proposicionales. ¿Que ocurre si eliminamos de este conjunto Γ la primer variable proposicional p_1? Es decir
$\Gamma = \{p_2, p_3, \dots, p_n, \dots\}$.

En este caso una valuación satisface a Γ si toma el valor 1 en todas las variables excepto en p_1 que puede tomar cualquier valor, luego en este caso hay exactamente 2 valuaciones que satisfacen a Γ.

En cambio si eliminamos las primeras dos variables, es decir $\Gamma = \{p_3, \dots, p_n, \dots\}$, una valuación satisface a este Γ si toma el valor 1 en todas las variables excepto en las primeras dos variables p_1, p_2. Como en estas dos variables el valor es arbitrario se sigue que existen 4 valuaciones que satisfacen a Γ.

Luego queda abierto el problema cuando $k = 3$. Pero esto se resuelve de la siguiente forma agregando a Γ una fórmula que dependa de p_1 y de p_2 de modo tal que existan exactamente 3 valuaciones que satisfagan a esta fórmula y que toman el valor 1 en las variables que están afuera (por ejemplo, $\alpha = (p_1 \vee p_2)$). Tomando $\Gamma = \{\alpha, p_3, \dots, p_n, \dots\}$ se tiene que existen exactamente 3 valuaciones que satisfacen a Γ que toman el valor 1 en p_j si $j \geq 3$, y en las variables p_1, p_2 toman los valores siguientes $v_1(p_1) = v_1(p_2) = 1$, $v_2(p_1) = 0$, $v_2(p_2) = 1$ y $v_3(p_1) = 1$, $v_3(p_2) = 0$.

Vayamos ahora al caso general. Tomenos k arbitrario y $\Gamma = \{p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n, \dots\}$ y tomemos una fórmula α cuyas variables proposicionales sean $p_1, p_2, \dots, p_k$ de modo tal que existan exactamente k valuaciones que hagan verdadera a α donde estas valuaciones sólo dependen de las variables $p_1, \dots, p_k$.

Por ejemplo basta construir una fórmula que tome el valor 1 si y sólo si vale 1 en p_i y vale 0 en el resto, es decir $v(p_j) = 1$ si $1 \leq j \leq k$ y $j \neq i$. Luego α debe ser la siguiente fórmula

$$\alpha = (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \dots \wedge \neg p_k) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3 \dots \wedge \neg p_k) \vee \dots \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \dots \wedge p_k)$$

Con esta elección de α se sigue que $\Gamma = \{\alpha, p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_n, \dots\}$ es satisfecho por exactamente k valuaciones.

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de función unaria f. Consideremos la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{I} = (\mathbb{C}, f_{\mathcal{I}})$, donde el universo son los números complejos, y la interpretación del símbolo f es la función elevar al cuadrado: $f_{\mathcal{I}}(z) = z^2$. Demostrar que

(a) Cada uno de los elementos $0, 1 \in \mathbb{C}$ es distinguible.

(b) El conjunto $A = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z \neq w$ y z es el inverso aditivo de $w\}$ es expresable.

Solución 2.
Como $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer orden con igualdad definimos

$$\neg(x = y) \equiv (x \neq y)$$

Un elemento e del universo es distinguible si exsite una $\mathcal{I}$-fórmula φ con una única variable libre x tal que $\mathcal{I} \models \varphi[v]$ si y sólo si $v(x) = e$.

(a) Para distinguir el 0, sea φ_x definida de la siguiente manera

$$\varphi_x : f_{\mathcal{I}}(x) = x \wedge \neg((\exists y)(y \neq x \wedge f_{\mathcal{I}}(y) = x))$$

Esta fórmula tiene una sola variable libre (x), y usa solamente elementos del lenguaje (el simbolo $f_{\mathcal{I}}$ y el símbolo de la igualdad).

Como la interpretación de $f_{\mathcal{I}}$ es elevar al cuadrado, acá estamos diciendo que

"hay un elemento x que al elevarlo al cuadrado da si mismo y

no existe otro elemento distinto tal que al elevarlo al cuadrado de como resultado el elemento x"

La única valuación que podría hacer verdad esto es aquella que mande a x al 0, puesto que el único número que al elevarlo al cuadrado da 0 es el mismo número 0.

Luego, el 0 es distinguible.

Para distinguir el 1, sea φ_x definida de la siguiente manera

$$\varphi_x : f_{\mathcal{I}}(x) = x \wedge (\exists y)(y \neq x \wedge f_{\mathcal{I}}(y) = x)$$

Esta fórmula tiene una sola variable libre (x), y usa solamente elementos del lenguaje (el simbolo $f_{\mathcal{I}}$ y el símbolo de la igualdad).

Como la interpretación de $f_{\mathcal{I}}$ es elevar al cuadrado, acá estamos diciendo que

"hay un elemento x que al elevarlo al cuadrado da si mismo y

existe otro elemento distinto tal que al elevarlo al cuadrado de como resultado el elemento x"

La única valuación que podría hacer verdad esto es aquella que mande a x al 1, puesto que el 1 cumple que $1^2 = 1$ y existe, por ejemplo, el elemento -1 en el universo completo tal que $(-1)^2 = 1$.

Luego, el 1 es distinguible.

(b) Dada una interpretación $\mathcal{I}$, una relación R es expresable cuando existe una n-fórmula de n variables libres φ tal que para toda valuación v, $\mathcal{I} \models \varphi[v]$ si y sólo si la valuación manda a las variables libres $x_1, \ldots, x_n$ a un lugar tal que $v(x_1), \ldots, v(x_n)$ pertenece a la relación R.

Luego, para el conjunto A buscamos primero un φ con 2 variables libres tal que $\mathcal{I} \models \varphi[v]$ cuando $v(x_1) \neq v(x_2)$ y, además, $v(x_2)$ es el inverso aditivo de $v(x_1)$.

Sea $\varphi(z, w) = (w \neq z) \wedge (f_{\mathcal{I}}(w) = f_{\mathcal{I}}(z))$.

Por propiedades de los números complejos, sabemos que los inversos aditivos deben ser iguales al elevarlos al cuadrado. La parte a la derecha de la fórmula expresa justamente esto.

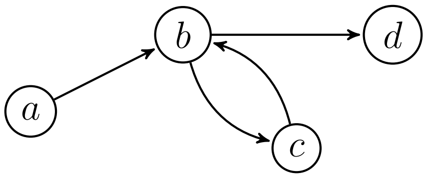
La parte de la izquierda de la fórmula se encarga de asegurar que los valores w y z no son el mismo. De nuevo, una valuación va a hacer que se cumpla esta parte de la fórmula cuando los valores del universo asignados a w y z no sean el mismo.

En resumen, una valuación hace verdad a esa fórmula cuando cumple que los valores w y z son distintos y el z es el inverso aditivo de w. Encontramos la fórmula, entonces, que me asegura que esa relación es expresable.

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con un símbolo de relación binario E. Una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$, se puede interpretar como un grafo con conjunto de aristas $E_{\mathcal{M}}$. Sea el sistema $SQ_{network}$ que extiende la axiomatiación SQ con las siguientes fórmulas:

$$\textbf{fuente} : (\exists x)((\exists y)E(x, y) \wedge (\forall)\neg E(z, x))$$
$$\textbf{sumidero} : (\exists x)((\exists y)E(y, x) \wedge (\forall)\neg E(x, z))$$

Demuestre que $SQ_{network}$ es correcto y no completo respecto a la siguiente estructura $\mathcal{M}$.



Solución 3.

- Para demostrar la correctitud de $SQ_{network}$ con respecto a $\mathcal{M}$ basta con probar que **fuente** y **sumidero** son válidas en $\mathcal{M}$. Esto porque el resto de los axiomas de $SQ_{network}$ (SQ) ya sabemos que cumplen correctitud sobre todos los modelos y, luego, por el ejercicio 1 de la práctica 7, por "conservación" de MP si se agregan axiomas válidos, con respecto a la clase, a un sistema ya correcto este sigue siendo correcto con respecto a la clase.

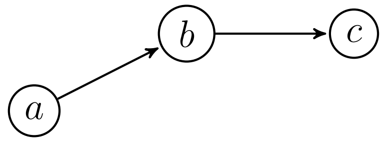
  fuente : lo que dice el axioma es que existe un nodo del que salen flechas pero que no recibe ninguna.

  Esto es cierto en $\mathcal{M}$ pues, por ejemplo, del nodo (a) salen fjechas pero éste no recibe flechas de ningún otro nodo.

  sumidero : lo que dice el axioma es que existe un nodo del que no salen flechas pero recibe alguna.

  Esto es cierto en $\mathcal{M}$ pues, por ejemplo, el nodo (d) recibe flechas pero de éste no salen flechas hacia ningún otro nodo.

- Veamos que $SQ_{network}$ no es completa respecto a $\mathcal{M}$. Definiendo $\mathcal{A}$



es claro que $SQ_{network}$ también es correcto respecto a $\mathcal{A}$ pues **fuente** es verdadero ya que en particular el nodo (a) lo satisface y **sumidero** también es verdadero puesto que en particular el nodo (c) lo cumple.

Sea la fórmula

$$\varphi : \quad (\exists x)((\exists y)E(x,y) \wedge E(y,x))$$

En $\mathcal{M}$, la fórmula φ es válida puesto que los nodos (c) y (b) lo cumplen pero si $SQ_{network}$ fuese completo respecto a $\mathcal{M}$ entonces $\vdash_{SQ_{network}} \varphi$ y como $SQ_{network}$ es también correcto respecto a $\mathcal{A}$ si $\vdash_{SQ_{network}} \varphi$ entonces $\mathcal{A} \models \varphi$ pero en $\mathcal{A}$ no hay un camino que sea de ida y vuelta.

Por lo tanto, φ no puede ser teorema de $SQ_{network}$ y, entonces $SQ_{network}$ no es completo con respecto a $\mathcal{M}$.